

SOME INSTRUCTIONAL MEASURES FOR TEACHING GEOMETRY BASED ON REALISTIC MATHEMATICS EDUCATION IN HIGH SCHOOLS

Le Tuan Anh¹ and Nguyen Huyen Trang^{2,*}

¹*Faculty of Mathematics and Informatics
Hanoi National University of Education,
Hanoi city, Vietnam*

²*Faculty of Natural Sciences, Hung Vuong
University, Phu Tho province*

*Corresponding author Nguyen Huyen Trang,
email: nguyenhuyentrang@hvu.edu.vn

MỘT SỐ BIỆN PHÁP DẠY HỌC HÌNH HỌC THEO LÝ THUYẾT REALISTIC MATHEMATICS EDUCATION Ở TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Lê Tuấn Anh¹ và Nguyễn Huyền Trang^{2,*}

¹*Khoa Toán Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội,
thành phố Hà Nội, Việt Nam*

²*Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học
Hung Vuong, tỉnh Phú Thọ*

*Tác giả liên hệ: Nguyễn Huyền Trang,
email: nguyenhuyentrang@hvu.edu.vn

Received May 14, 2025.

Revised August 26, 2025.

Accepted November 28, 2025.

Ngày nhận bài: 14/5/2025.

Ngày sửa bài: 26/8/2025.

Ngày nhận đăng: 28/11/2025.

Abstract. Realistic Mathematics Education (RME) is a domain-specific instructional theory that has profoundly influenced mathematics education worldwide, significantly contributing to the innovation of teaching methods in various countries. In the context of the recent comprehensive educational renovation in Vietnam, RME has garnered the attention of numerous mathematics educators for research and implementation. This paper studies the principles of RME, particularly the use of contexts and the use of models. Based on these principles, the article proposes three instructional measures for teaching geometry in high schools based on RME principles, aiming to enhance the effectiveness of mathematics instruction and develop students' mathematical abilities.

Keywords: Realistic mathematics education, learning situation, Geometry, high school.

Tóm tắt. Lý thuyết Realistic Mathematics Education (RME) là một lý thuyết giáo dục có ảnh hưởng sâu rộng, góp phần quan trọng vào việc đổi mới phương pháp dạy học môn Toán ở nhiều quốc gia trên thế giới. Trong bối cảnh đổi mới căn bản và toàn diện của giáo dục Việt Nam, lý thuyết RME đã thu hút sự quan tâm nghiên cứu và triển khai của nhiều nhà giáo dục toán học. Bài báo này nghiên cứu các nguyên tắc của RME đặc biệt nguyên tắc sử dụng bối cảnh và sử dụng mô hình. Từ đó bài báo đề xuất ba biện pháp dạy học Hình học theo lý thuyết RME ở trường trung học phổ thông nhằm nâng cao hiệu quả dạy học môn Toán và phát triển năng lực toán học của học sinh.

Từ khóa: Realistic mathematics education, tình huống học tập, Hình học, Trung học phổ thông.

1. Mở đầu

Hội nghị Royaumont năm 1959 được tổ chức tại Pháp với 18 quốc gia tham dự [1] đã mạnh mẽ thúc đẩy cải cách môn Toán ở trường phổ thông mang tên “Toán học mới” sau này được phát triển ở nhiều nước trên thế giới [2]. Trong giai đoạn này để tìm kiếm một xu hướng đổi mới dạy học môn Toán ở cấp Tiểu học, các nhà nghiên cứu ở Hà Lan đã phân tích 3 xu hướng giáo

dục toán học đang thịnh hành vào thời gian đó [3]: xu hướng cơ học, xu hướng kinh nghiệm và xu hướng cấu trúc dựa vào 2 tiêu chí toán học hóa. Không tiếp cận theo cách hiện đại hóa chương trình môn Toán của phong trào Toán học mới, nhà giáo dục toán học Freudenthal của Hà Lan tập trung trả lời câu hỏi: tại sao và làm thế nào để dạy học môn Toán trở nên thực sự có ích? [4]. Dưới sự dẫn dắt của Freudenthal – người không không ủng hộ tư tưởng của phong trào Toán học mới [5], phong trào này đã không có được chỗ đứng trong các trường học tiểu học ở Hà Lan [6]. Thay vào đó, một xu hướng giáo dục toán học mới được đề xuất và phát triển trong đó chú trọng cả toán học hóa đọc và toán học hóa ngang dẫn đến sự hình thành nên lý thuyết Realistic Mathematics Education (RME) tại Hà Lan [7]. Về sau thực tế đã chỉ ra những tư tưởng của phong trào Toán học mới về nhanh chóng hiện đại hóa quá mức chương trình môn Toán ở trường phổ thông là không phù hợp với học sinh (HS) và không khả thi nên phong trào này dần trở thành thoái trào.

Lý thuyết giáo dục toán học RME do Freudenthal khởi xướng – một lý thuyết dạy học gắn với những lĩnh vực trong môn Toán [3] – được nhiều nhà giáo dục toán học trên toàn thế giới quan tâm và phát triển mạnh mẽ [8]. Theo Gravemeijer cách tiếp cận theo lý thuyết RME ngày nay chịu ảnh hưởng rất lớn từ ba cách tiếp cận trước đó: Thứ nhất, lý thuyết các cấp độ tư duy do Van Hiele đề xuất và phát triển; thứ hai, ý tưởng của Freudenthal về “toán học là một hoạt động của con người” và thứ ba là tiến trình toán học hóa của Treffers [9].

Trong giai đoạn đầu khi mới được giới thiệu vào Việt Nam thông qua hai luận án tiến sĩ của Nguyễn Thanh Thủy (2005) tại Hà Lan và Lê Tuấn Anh (2006) tại CHLB Đức [10], [11], lý thuyết RME chưa nhận được nhiều sự quan tâm nghiên cứu của các nhà giáo dục toán học ở nước ta. Trong những năm gần đây cùng với sự đổi mới căn bản và toàn diện của giáo dục Việt Nam, lý thuyết RME nhận được sự quan tâm đáng kể của cộng đồng các nhà giáo dục toán học trong nước. Từ góc độ chính sách, phát triển chương trình và đề xuất biện pháp [12]-[14] cho đến thực tiễn vận dụng lý thuyết RME trong dạy học: khám phá lại Định lý Cosin – Hình học 10 [15], dạy học chủ đề hình Elip [16], về dạy học Giải tích ở trường Trung học phổ thông (THPT) [17]-[18].

Có thể thấy, các chủ đề trong nghiên cứu thiết kế bài học theo hướng tiếp cận lý thuyết RME tại Việt Nam về dạy học Hình học còn chưa nhiều. Hơn nữa, chưa có công trình nào nghiên cứu biện pháp dạy học Hình học ở trường THPT theo tiếp cận RME. Đây là những khoảng trống nghiên cứu thúc đẩy cho việc tiến hành nghiên cứu trong bài báo này.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Phân tích nguyên tắc dạy học theo lý thuyết RME

Lý thuyết RME hình thành và phát triển dựa trên 3 quan điểm do Hans Freudenthal đề xuất (toán học là một hoạt động của con người, người học khám phá có hướng dẫn và hiện tượng học sự phạm) và 5 nguyên tắc dạy học (sử dụng bối cảnh, sử dụng mô hình, sản phẩm và sự xây dựng của HS, sự tương tác, và tích hợp các mạch kiến thức) [14]. Trong 5 nguyên tắc dạy học nói trên, sử dụng bối cảnh và sử dụng mô hình là những nguyên tắc cốt lõi nhất của lý thuyết RME. Trong phần này, chúng tôi phân tích để làm rõ hơn hai nguyên tắc này.

Trong lý thuyết RME, bối cảnh (có thể là bối cảnh thực tiễn hoặc bối cảnh toán học thuần túy) được lựa chọn trong các thiết kế giảng dạy theo lý thuyết RME phải có thực trong suy nghĩ của HS và phù hợp về mặt trải nghiệm đối với người học nhưng cũng chứa đựng thách thức nhằm kích thích tư duy toán học [3] để người học được đặt vào tình huống/vấn đề mà họ có thể suy nghĩ, tư duy, tưởng tượng và từng bước “khám phá lại” (có hướng dẫn) tri thức toán học [19].

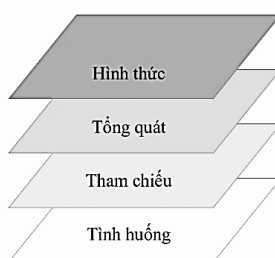
Theo nguyên tắc sử dụng bối cảnh, giáo viên (GV) có thể cung cấp cho người học các tình huống theo bối cảnh có thể tưởng tượng được và do đó tạo cho họ cơ hội khám phá kiến thức không chính thức của mình trong bối cảnh. Quá trình này có thể bao gồm "khám phá tình huống có vấn đề, trực quan hóa các mô hình và phát triển mô hình dẫn đến khái niệm toán học" [20]. Theo nghĩa này, vấn đề gắn với bối cảnh không chỉ được sử dụng ở cuối quá trình học tập và xem

là ứng dụng của tri thức toán học mà thay vào đó bối cảnh còn là nguồn của quá trình học tập, để hình thành cũng như ứng dụng của những tri thức này [21]. Tóm lại, các quy trình và khái niệm không nên được trình bày trước các vấn đề bối cảnh giống như trong phương pháp tiếp cận cơ học truyền thống: việc dạy và học toán được triển khai theo dạng “Top - down” nghĩa là trình bày tri thức toán học trước từ đó HS áp dụng tri thức giải quyết bài toán có nội dung thực tiễn [22].

Như vậy sự khác biệt căn bản giữa sử dụng bối cảnh trong lý thuyết RME và xu hướng nhấn mạnh ứng dụng toán học ở chỗ nhiệm vụ gắn với bối cảnh có thể là bối cảnh thực tiễn, nhưng cũng có thể là bối cảnh trong nội bộ Toán học và bối cảnh được sử dụng ngay từ đầu của quá trình dạy học môn Toán, tạo cơ hội cho HS được khám phá tri thức toán học; trong khi với xu hướng chú trọng ứng dụng toán học, HS sẽ được dạy các tri thức toán học trước, rồi được yêu cầu vận dụng các tri thức được học để giải quyết các vấn đề có nội dung thực tiễn.

Nguyên tắc thứ hai sử dụng mô hình trong lý thuyết RME dựa trên ý tưởng rằng học tập là một quá trình chuyển từ cụ thể sang trừu tượng trải qua các cấp độ khác nhau. Theo Freudenthal hoạt động toán học chủ yếu bao gồm việc tổ chức hoặc toán học hóa [18]. Treffers đã thảo luận về “kết nối bằng các công cụ dọc” (bridging by vertical instruments) như một trong những đặc điểm của phương pháp tiếp cận RME, trong đó ông nhấn mạnh tầm quan trọng của các mô hình tự phát triển [3] mà sau đó phát triển thành mô hình tự phát sinh. Mô hình tự phát sinh được đặc trưng bởi sự tổ chức các hoạt động toán học hoá. Ý tưởng về mô hình như là sự tổ chức được bắt nguồn từ quan điểm của Freudenthal “Toán học là một hoạt động của con người” [23] và mô hình tự phát sinh có vai trò là cơ sở để HS khám phá tri thức toán học [24].

Theo Gravemeijer mô hình tự phát sinh là chìa khóa để xây dựng các bước trung gian trong quá trình khám phá từ tình huống gắn với bối cảnh phù hợp với kinh nghiệm, trải nghiệm của HS đến toán học hình thức và đóng vai trò như một cầu nối giữa các phương hướng, lời giải, cách giải không chính thức và các tri thức toán học hình thức [25]. Gravemeijer cho rằng mô hình tự phát sinh trong lý thuyết RME bao gồm 4 cấp độ (Hình 1): cấp độ tình huống, cấp độ tham chiếu, cấp độ tổng quát và toán học hình thức) [9], [26].



Hình 1. Mô hình tự phát sinh theo Gravemeijer [9]

Từ những nghiên cứu điển hình về quan điểm và nguyên tắc cơ bản của lý thuyết RME, các nhà giáo dục toán học tại nhiều quốc gia đã triển khai và vận dụng lý thuyết RME theo các hướng nghiên cứu khác nhau. Có thể khẳng định việc nghiên cứu và vận dụng lý thuyết RME trong dạy học môn Toán hiện nay là vấn đề mang tính thời sự, luôn nhận được nhiều sự quan tâm của các nhà toán học và giáo dục toán học ở nhiều quốc gia trên thế giới.

2.2. Đề xuất biện pháp dạy học Hình học theo lý thuyết Realistic Mathematics Education ở trường Trung học phổ thông

2.2.1. Định hướng đề xuất biện pháp

Trên cơ sở nghiên cứu lý thuyết RME, các biện pháp dạy học Hình học ở trường THPT được đề xuất dựa trên các định hướng sau đây:

Định hướng 1. Các biện pháp thể hiện các quan điểm của Freudenthal về giáo dục toán học. Những quan điểm của Freudenthal là “linh hồn”, là nền tảng của lý thuyết RME, biến việc học toán trở thành một hành trình khám phá thú vị và có ý nghĩa với người học. Việc thể hiện được

các tư tưởng này cũng chìa khóa để đạt được mục tiêu giáo dục toán học theo lí thuyết RME. Vì vậy, các biện pháp đề xuất cần quán triệt các quan điểm của Freudenthal về giáo dục toán học.

Định hướng 2. Các biện pháp cần quán triệt các nguyên tắc dạy học của lí thuyết RME. Các nguyên tắc dạy học của lí thuyết RME là sử dụng bối cảnh, sử dụng mô hình, sản phẩm và sự xây dựng của HS, sự tương tác và tích hợp các mạch kiến thức. Việc quán triệt các nguyên tắc dạy học của lí thuyết RME giúp HS hiểu sâu, linh hoạt, sáng tạo và từng bước khám phá lại tri thức toán học. Nếu GV bỏ qua các nguyên tắc này sẽ đánh mất ưu điểm đột phá của nó đặc biệt là 2 nguyên tắc sử dụng bối cảnh và sử dụng mô hình.

Định hướng 3. Các biện pháp phù hợp với chương trình giáo dục phổ thông (CTGDPT) môn Toán 2018. CTGDPT môn Toán 2018 hiện có 4 bộ sách giáo khoa (SGK): Kết nối tri thức với cuộc sống, Cánh Diều, Chân trời sáng tạo và Cùng khám phá. Tuy nhiên các bộ SGK đều phải đảm bảo mục tiêu, nội dung cũng như yêu cầu cần đạt của CTGDPT môn Toán 2018. Do đó các biện pháp đưa ra cần phải phù hợp với CTGDPT môn Toán 2018.

Định hướng 4. Các biện pháp có tính khả thi trong điều kiện dạy học môn Toán ở Việt Nam. Trong điều kiện dạy học môn Toán tại các trường THPT ở Việt Nam, các biện pháp đề xuất cần phù hợp với các điều kiện về con người, cơ sở vật chất, trang thiết bị,... để GV có thể thực hiện triển khai ở cấp độ lớp học, HS có thể tham gia vào quá trình khám phá lại tri thức toán học.

2.2.2. Một số biện pháp dạy học Hình học theo lí thuyết Realistic Mathematics Education

Từ những nghiên cứu về lí thuyết RME và các định hướng nêu trên, 3 biện pháp dạy học Hình học theo lí thuyết RME ở trường THPT được đề xuất. Trong bài báo này, ví dụ minh họa cho các biện pháp về dạy học Hình học không gian ở lớp 11, cụ thể là công thức thể tích của hình chóp cụt đều.

*** Biện pháp 1: Phân tích sự hình thành phát triển của tri thức toán học để xây dựng bối cảnh phù hợp với lí thuyết RME**

- *Mục đích của biện pháp.* Việc đề xuất biện pháp nhằm hướng đến một số mục tiêu: (1) Cung cấp cho GV một cách tiếp cận đa dạng trong việc lựa chọn bối cảnh phù hợp với lí thuyết RME trong dạy học Hình học; (2) Cung cấp cho HS tình huống gắn với bối cảnh có ý nghĩa với người học, phù hợp với kinh nghiệm và trải nghiệm của người học.

- *Cách thức thực hiện biện pháp.*

+ *Bước 1:* GV xác định nội dung bài học và yêu cầu cần đạt.

Căn cứ vào CTGDPT 2018 môn toán và nghiên cứu SGK, GV xác định nội dung bài học, yêu cầu cần đạt của HS sau bài học. GV xác định tri thức toán học trọng tâm của bài học, tri thức toán học, kĩ năng HS đang có để tiếp nhận nội dung bài học cũng như kĩ năng HS cần đạt được. Từ đó GV lựa chọn nội dung kiến thức để xây dựng bối cảnh.

+ *Bước 2:* Phân tích sự hình thành phát triển của tri thức toán học để xây dựng bối cảnh xuất phát theo lí thuyết RME

Trong quan niệm về hiện tượng học sự phạm, Freudenthal cho rằng GV phải cung cấp các ví dụ gần gũi với kinh nghiệm, trải nghiệm của người học và phù hợp để thúc đẩy quá trình học tập [27]. Theo Freudenthal, hiện tượng học sự phạm có thể “cho GV thấy nơi mà người học có thể bước vào quá trình học tập của nhân loại” [28].

Do đó, mục đích của hoạt động nghiên cứu tri thức toán học trong sự hình thành và phát triển của chúng để sử dụng trong dạy học môn Toán là "tìm ra các tình huống vấn đề mà từ đó các phương pháp tiếp cận cụ thể của tình huống có thể được khái quát hóa và tìm ra các tình huống có thể gọi ra giải pháp làm cơ sở cho toán học hóa theo chiều dọc" [29].

GV có thể vận dụng tư tưởng về nghiên cứu sự hình thành của tri thức toán học trong sự hình thành phát triển của nó để xây dựng bối cảnh phù hợp theo lí thuyết RME trong dạy học Hình học theo các cách: (1) Căn cứ vào lịch sử ra đời và hình thành tri thức toán học để lựa chọn những bối cảnh phù hợp; (2) Tìm kiếm những bối cảnh thích hợp được giới thiệu trong các tài liệu, đặc biệt

là trong các bộ SGK; (3) Nghiên cứu các thể hiện đa dạng của tri thức toán học này trong nội bộ môn Toán, từ các khoa học, môn học khác và thực tiễn xã hội, cuộc sống để xác định bối cảnh hợp với tri thức.

- *Ví dụ minh họa. Lựa chọn bối cảnh xây dựng công thức tính thể tích khối chóp cắt đều (Toán 11).*

+ *Bước 1:* GV xác định nội dung bài học và yêu cầu cần đạt.

Trong CTGDPT 2018 môn Toán, nội dung và yêu cầu cần đạt của bài học “Thể tích” (Hình học 11) được xác định cụ thể như sau:

Về mặt nội dung, bài “Thể tích” thuộc phần kiến thức “Hình chóp cắt đều và thể tích” trong nội dung “Quan hệ vuông góc trong không gian. Phép chiếu vuông góc”.

Các yêu cầu cần đạt: Nhận biết được hình chóp cắt đều; Tính được thể tích khối chóp cắt đều; Vận dụng được kiến thức về hình chóp cắt đều để mô tả một số hình ảnh trong thực tiễn.

+ *Bước 2:* Tiến hành phân tích để xây dựng bối cảnh xuất phát theo lý thuyết RME.

o Tìm kiếm những bối cảnh thích hợp được giới thiệu trong các tài liệu, đặc biệt là trong các SGK

Trước tiên cần phân tích thiết kế công thức thể tích khối chóp cắt đều trong bộ SGK cơ bản và nâng cao theo CTGDPT 2006 và các bộ SGK theo CTGDPT 2018 môn toán.

Theo CTGDPT môn Toán 2006, hình chóp đều và hình chóp cắt đều được giới thiệu trong bài “Hai mặt phẳng vuông góc” trong SGK Hình học 11. Nội dung thể tích của các khối đa diện được trình bày ở chương I trong SGK hình học 12 và Hình học 12 nâng cao. Tuy nhiên trong CT GDPT môn Toán 2006 chỉ giới thiệu thể tích khối chóp còn thể tích khối chóp cắt đều không được giới thiệu đến HS.

CTGDPT môn Toán 2018 có các bộ SGK: Cánh diều [30], Chân trời sáng tạo [31], Cùng khám phá [32], Kết nối tri thức với cuộc sống [33]. Nội dung “Thể tích khối chóp cắt đều” thuộc kiến thức phần “Thể tích” (Toán 11) và được triển khai thông qua các hoạt động sau đây:

Đối với bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống, sau hoạt động mở đầu với bài toán về lựa chọn loại điều hoà với công suất khác nhau, công thức thể tích các khối lần lượt được giới thiệu trực tiếp cho HS theo thứ tự khối chóp, khối chóp cắt đều, khối lăng trụ và vận dụng trong các bài toán thuần toán, các ứng dụng trong cuộc sống như tính thể tích sọt đựng đồ có dạng hình chóp cắt đều. Trong bộ sách Cánh diều, thể tích của một số hình khối được chia làm 2 mục trong đó mục đầu tiên giới thiệu thể tích của khối lăng trụ, mục thứ hai giới thiệu thể tích của khối chóp, khối chóp cắt đều và các công thức thể tích cũng được đưa ra để HS áp dụng tính thể tích khối chóp cắt tam giác đều và thể tích của thùng đựng rác có dạng khối chóp cắt tứ giác đều. Bộ sách Chân trời sáng tạo trình bày công thức này và vận dụng tính thể tích bồn chứa có dạng khối chóp cắt đều. Trong bộ sách Cùng khám phá, công thức thể tích khối chóp cắt đều thiết kế bao gồm hoạt động giới thiệu công thức từ đó vận dụng tính thể tích không gian bên trong phòng ngủ ngoài trời có hình dạng hình chóp cắt tứ giác đều.

Trong bốn bộ sách của CTGDPT môn Toán 2018, công thức thể tích khối chóp cắt đều được giới thiệu cho HS sau khi giới thiệu thể tích khối chóp và theo hướng áp dụng trong các bài toán tính toán thuần toán và các bài toán gắn với thể hiện của khối chóp cắt đều trong cuộc sống.

o Nghiên cứu các cách tiếp cận đa dạng của tri thức toán học để xác định bối cảnh hợp với tri thức.

Hình chóp cắt đều $A_1A_2...A_n.B_1B_2...B_n$ được tạo thành từ hình chóp đều $S.A_1A_2...A_n$ sau khi cắt đi hình chóp đều $S.B_1B_2...B_n$. Do đó có thể sử dụng phương pháp phân bù để tính thể tích tức là: $V_{S.A_1A_2...A_n} = V_{A_1A_2...A_n.B_1B_2...B_n} + V_{S.B_1B_2...B_n}$.

Bên cạnh đó ta có thể sử dụng kiến thức về hình đồng dạng để thiết lập công thức tỉ lệ thể tích của khối chóp đều $S.A_1A_2...A_n$ và khối chóp đều $S.B_1B_2...B_n$ để từ đó tính thể tích.

Riêng đối với hình chóp cắt tam giác đều và hình chóp cắt tứ giác đều ngoài hai cách tiếp cận trên có thể sử dụng cách phân chia – cắt ghép hình khối để đưa về các khối chóp cơ bản từ đó tính được thể tích khối chóp cắt đều.

○ Nghiên cứu các thể hiện đa dạng của tri thức toán học (khối chóp cắt đều) từ các khoa học, môn học khác và thực tiễn xã hội, cuộc sống để xác định bối cảnh hợp với kiến thức.

Trong thực tiễn, khối chóp cắt đều có những thể hiện đa dạng gắn với hình ảnh liên quan đến thiết kế, xây dựng, trang trí nội thất,... Những “bối cảnh thực” được lựa chọn để xây dựng tình huống dạy học (THDH) cần hợp lí, thực tế, gần gũi với trải nghiệm, kinh nghiệm của HS.



Chậu hoa



Đèn trang trí (Nguồn: [tps://annamdecor.vn/](https://annamdecor.vn/))



Lọ hoa

Hình 2. Một số thể hiện của khối chóp cắt trong thực tiễn

* **Biện pháp 2: Thiết kế các nhiệm vụ học tập (NVHT) phù hợp với 4 cấp độ của mô hình tự phát sinh để HS khám phá tri thức toán học**

- **Mục đích của biện pháp.** Việc đề xuất biện pháp nhằm hướng đến một số mục tiêu: (1) Trang bị cho GV một cách tiếp cận trong dạy học Hình học; (2) Tạo cơ hội cho HS tăng cường khả năng huy động các tri thức sẵn có, tri thức thực tế giải quyết vấn đề; (3) Giúp HS rèn luyện, phát triển khả năng toán học hoá (Toán học hoá ngang và toán học hoá dọc).

- **Cách thức thực hiện biện pháp.**

+ **Bước 1:** Phác thảo mô hình tự phát sinh của tình huống gắn với bối cảnh

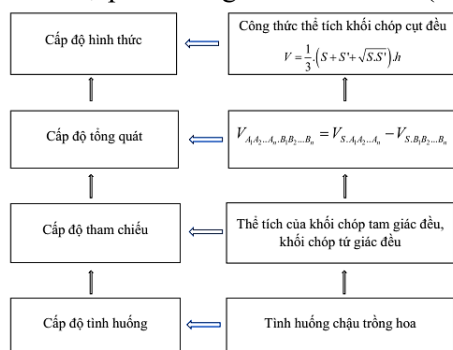
Sau khi có được bối cảnh phù hợp, GV có thể phác thảo 4 cấp độ của mô hình tự phát sinh gắn với tri thức toán học đã xác định của bài học.

+ **Bước 2:** Thiết kế NVHT theo 4 cấp độ của mô hình tự phát sinh

Từ bản phác thảo 4 cấp độ ở bước 1, GV thiết kế các NVHT phù hợp và gắn với các bước của mô hình tự phát sinh, gần gũi với kinh nghiệm, trải nghiệm của HS. Bên cạnh đó với mục đích giúp HS khám phá kiến thức toán học, tình huống được xây dựng cần đảm bảo tính hệ thống, logic, tính chính xác và phù hợp với năng lực, nhận thức của HS.

- **Ví dụ minh họa:** Thiết kế các NVHT phù hợp với 4 cấp độ của mô hình tự phát sinh để HS khám phá công thức tính thể tích khối chóp cắt đều (Toán 11).

+ **Bước 1:** Phác thảo mô hình tự phát sinh gắn với bối cảnh (Hình 3).



Hình 3. Mô hình tự phát sinh của công thức thể tích khối chóp cắt đều

+ **Bước 2:** Thiết kế NVHT theo 4 cấp độ của mô hình tự phát sinh

Vì khối chóp cắt đều được hình thành từ khối chóp đều và có những thể hiện đa dạng trong thực tiễn nên bối cảnh xuất phát có thể xây dựng từ thực tiễn hoặc từ chính nội bộ toán học.

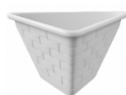
Các NVHT được thiết kế nhằm mục đích giúp HS xây dựng công thức thể tích khối chóp cắt đều được trình bày dưới đây:

- NVHT số 1:

+ Tình huống gắn với bối cảnh từ toán học: Tính thể tích khối chóp cắt tam giác đều $ABC.A'B'C'$ biết chiều cao của khối chóp cắt bằng $10(cm)$, độ dài các cạnh đáy $AB = 20(cm)$, $A'B' = 10(cm)$.

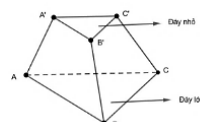
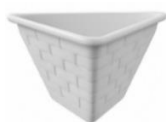
+ Tình huống gắn với bối cảnh từ thực tiễn: Bối cảnh chậu trồng hoa, đèn trang trí, lều dã ngoại, ... có thể được khai thác với các số liệu phù hợp. Từ đó có thể xây dựng NVHT sau:

Một chậu trồng hoa có hình dạng khối chóp cắt tam giác đều (Hình 4) có chiều cao bằng $10(cm)$, độ dài cạnh đáy lớn bằng $20(cm)$, độ dài cạnh đáy bé bằng $10(cm)$. Tính thể tích chậu trồng hoa.



Hình 4. Chậu trồng hoa dạng khối chóp cắt tam giác đều

Từ bài toán đã cho HS tiến hành mô hình hoá vấn đề (Hình 5): Chậu hoa được mô tả là khối chóp cắt tam giác đều $A'B'C'.ABC$ có chiều cao bằng $10(cm)$ với đáy nhỏ là tam giác đều $A'B'C'$ có độ dài cạnh $A'B' = 10(cm)$, đáy lớn là tam giác đều ABC có độ dài cạnh $AB = 20(cm)$.



Hình 5. Mô hình hoá vấn đề

Từ đó HS sử dụng kiến thức về thể tích khối chóp để tính thể tích khối chóp cắt theo nhiều hướng khác nhau:

Hướng 1: Sử dụng phân bù của khối chóp cắt đều.

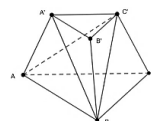
Cách 1: Có thể tính thể tích khối chóp cắt thông qua thể tích khối chóp $S.ABC$ và thể tích khối chóp $S.A'B'C'$. Từ đó suy ra thể tích chậu hoa $V = V_{S.ABC} - V_{S.A'B'C'}$.

Cách 2: Hoặc quy về $V_{S.ABC}$ bằng cách so sánh tỉ số diện tích đáy và chiều cao của khối chóp $S.ABC$ có diện tích đáy $S_{ABC} = S_1$, chiều cao h_1 và khối chóp $S.A'B'C'$ có diện tích đáy $S_{A'B'C'} = S_2$, chiều cao h_2 . Ta có: $h_2 = \frac{1}{2}h_1$, $S_2 = \frac{1}{4}S_1$ nên $V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{8}V_{S.ABC}$ suy ra $V = \frac{7}{8}V_{S.ABC}$.

Cách 3: Bên cạnh đó, có thể sử dụng công thức tỉ số thể tích của hai hình chóp tam giác $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$ để từ đó tính thể tích khối chóp cắt tam giác đều $A'B'C'.ABC$.

Hướng 2: Phân chia – cắt ghép khối chóp cắt đều.

Cách 4: Có thể phân chia khối chóp cắt tam giác đều $A'B'C'.ABC$ thành 3 khối chóp: $C'.ABC$, $C'.A'B'B$ và khối chóp $C'.A'AB$ (Hình 6). Trong đó:



Hình 6. Phân chia – cắt ghép khối chóp cắt tam giác đều

Khối chóp $C'.ABC$ có đáy là tam giác đều ABC với cạnh bằng $20(cm)$; chiều cao của khối chóp bằng chiều cao của khối chóp cắt đều. Để tính thể tích khối chóp $C'.A'B'B$, việc chuyển đổi góc nhìn đỉnh và đáy khối chóp sẽ giúp việc tính toán dễ dàng hơn. HS có thể nhìn khối chóp

theo hướng hình chóp đỉnh B với đáy là tam giác đều $A'B'C'$ và có chiều cao là chiều cao của khối chóp cắt đều. Thể tích của khối chóp $C'.A'AB$ có thể tích được dựa vào thể tích khối chóp $C'.A'B'B$ bằng cách so sánh tỉ lệ diện tích đáy (diện tích $\triangle ABA'$, $\triangle A'B'B$) và chung chiều cao hạ từ đỉnh C' xuống mặt đáy $A'B'BA$.

- NVHT số 2: Cho khối chóp cắt tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng h , diện tích đáy lớn S , diện tích đáy bé S' . Tính thể tích khối chóp cắt đều $ABC.A'B'C'$ theo S , S' và h .

Để trả lời cho câu hỏi của NVHT số 2, HS căn cứ vào các hoạt động ở NVHT 1 để tự tìm ra các phương án giải quyết NVHT 2.

- NVHT số 3:

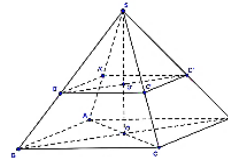
+ Tình huống gắn với bối cảnh từ toán học: Tính thể tích khối chóp cắt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ biết chiều cao của khối chóp cắt bằng $10(cm)$, độ dài các cạnh $AB = 9(cm)$, $A'B' = 7(cm)$.

+ Tình huống gắn với bối cảnh thực tiễn: Một chậu trồng hoa cỡ nhỏ (hình 7) có chiều cao bằng $10(cm)$, độ dài cạnh đáy lớn bằng $9(cm)$ và độ dài cạnh đáy nhỏ bằng $7(cm)$. Tính thể tích của chậu trồng hoa.

Từ NVHT 1 và NVHT 2, HS đã định hình được các hướng tiếp cận để tính thể tích khối chóp cắt tứ giác đều theo hướng sử dụng phân bù hoặc phân chia – cắt ghép khối chóp cắt. Tuy nhiên theo hướng sử dụng phân bù, ngoài các cách như trong 2 nhiệm vụ đã làm, HS có thể tính khối chóp cắt tứ giác đều thông qua thể tích khối chóp $S.ABC$ hoặc $S.AOB$ (Hình 8). Theo hướng phân chia – cắt ghép khối chóp cắt có thể chia thành các khối chóp hoặc phân chia thành tổ hợp khối chóp – khối lăng trụ và khối lập phương.



Hình 7. Chậu trồng hoa dạng chóp cắt tứ giác đều



Hình 8. Khối chóp tứ giác đều

- NVHT số 4: Tính thể tích khối chóp cắt đều có diện tích đáy lớn S , diện tích đáy bé S' và chiều cao là h .

Để có thể xác định cách thức xây dựng công thức thể tích khối chóp cắt đều căn cứ vào các nhiệm vụ trước đó, HS có thể tính thể tích dựa vào phân bù với khối chóp gốc hoặc thông qua việc chia khối chóp cắt đều thành n khối chóp tam giác bằng nhau theo đường cao của khối chóp chính.

NVHT từ 1 đến 3 tương ứng với cấp độ tình huống và cấp độ tham chiếu, NVHT số 4 tương ứng với cấp độ tổng quát và toán học hình thức trong mô hình tự phát sinh theo lý thuyết RME.

* **Biện pháp 3: Sử dụng công nghệ thông tin (CNTT) hỗ trợ dạy học Hình học phù hợp với lý thuyết RME ở trường THPT**

- Mục đích của biện pháp.

Ngày nay các yếu tố công nghệ, đặc biệt là CNTT phát triển có tính bùng nổ và được ứng dụng sâu, rộng vào hầu khắp các lĩnh vực của đời sống xã hội. Do đó, việc sử dụng CNTT hỗ trợ HS khám phá tri thức toán học theo tiếp cận RME là cần thiết.

Việc đề xuất biện pháp nhằm hướng đến một số mục tiêu: (1) Trực quan hoá các đối tượng hình học trừu tượng; (2) Tạo môi trường học tập tương tác hỗ trợ HS hình thành tri thức toán học; (3) Tăng cường khả năng khám phá và sáng tạo của HS.

- Cách thức thực hiện biện pháp.

+ Bước 1: GV xác định nội dung cụ thể/chủ đề toán học mà công nghệ thông tin có thể hỗ trợ.

Chọn các chủ đề toán học mà công nghệ thông tin có thể hỗ trợ tốt nhất, ví dụ: vẽ hình, thực hiện phép biến hình trong mặt phẳng, chứng minh định lý, khám phá sự thay đổi của các yếu tố hình học.

+ *Bước 2*: GV thiết kế nội dung với sự hỗ trợ của CNTT

GV lựa chọn phần mềm phù hợp để sử dụng thiết kế: Sự ra đời và phát triển mạnh mẽ của các phần mềm Hình học động như Cabri 2D, Cabri 3D, Geometer's Sketchpad và Toán học động như GeoGebra đã hỗ trợ và tác động đáng kể đến việc dạy học Hình học, đặc biệt hình học không gian ở trường THPT. Một trong những ưu điểm chính của các phần mềm này là nếu vẽ hình theo đúng nguyên tắc của phần mềm thì khi ta thay đổi các đối tượng của hình thì các quan hệ giữa các đối tượng (song song, vuông góc,...) không thay đổi. Hơn nữa, Cabri 3D và Geogebra cho phép quay, xoay, chiếu và quan sát từ nhiều góc độ, giúp HS hình dung không gian trực quan. HS có thể thay đổi yếu tố đầu vào và quan sát sự thay đổi kết quả và hỗ trợ HS khám phá, phát hiện... các tri thức toán học. Phần mềm GeoGebra hoặc Sketchpad đều hỗ trợ tốt cho dạy học hình học phẳng: đường tròn, tam giác, phép tịnh tiến, ... Phần mềm GeoGebra được tích hợp cả Đại số, Giải tích, Thống kê, Xác suất... nên hỗ trợ tốt cho việc dạy học môn Toán theo quan điểm tích hợp. Gần đây người dùng có thể chạy phần mềm trực tuyến hoặc sử dụng các app trên máy tính bảng hoặc điện thoại thông minh tạo sự linh hoạt và đa dạng trong sử dụng. Ngoài ra, GV có thể tìm kiếm các video về nội dung tri thức toán học và khai thác video trong bài giảng.

Bên cạnh đó, gần đây công nghệ AR (Augmented Reality – Thực tế tăng cường) giúp minh họa các khái niệm trừu tượng bằng mô hình 3D tương tác được. HS có thể chạm, kéo, điều chỉnh mô hình, thay vì chỉ nghe giảng hoặc quan sát tĩnh. Do đó, HS có thể khám phá, trải nghiệm và hình thành tri thức phù hợp với lý thuyết RME. Công nghệ AR cũng được tích hợp vào GeoGebra.

- *Ví dụ minh họa. Sử dụng CNTT hỗ trợ xây dựng công thức tính thể tích khối chóp cụt đều (Toán 11)*

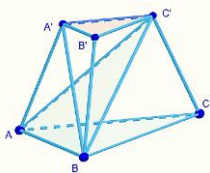
+ *Bước 1*: GV xác định nội dung chủ đề toán học mà phần mềm hình học/công nghệ có thể hỗ trợ.

Như đã phân tích ở trên, đối với khối chóp cụt tam giác đều và khối chóp cụt tứ giác đều, ngoài cách tiếp cận sử dụng phần bù để tính thể tích, HS có thể tiếp cận theo hướng phân chia khối chóp cụt thành các khối chóp tam giác. Tuy nhiên việc phân chia khối chóp cụt thành các khối chóp đối với một số HS là tương đối khó khăn do khả năng tưởng tượng không gian chưa tốt. Như vậy GV có thể lựa chọn nội dung kiến thức NVHT số 1 và NVHT số 3: phân chia cắt ghép khối chóp cụt tam giác đều để thiết kế với sự hỗ trợ của CNTT.

+ *Bước 2*: GV thiết kế nội dung với sự hỗ trợ của CNTT.

Việc sử dụng các phần mềm hình học động giúp HS có thể trực quan hoá các đối tượng hình học trong không gian, hỗ trợ quá trình hình thành tri thức toán học. Để minh họa cho phương pháp phân chia – cắt ghép khối chóp cụt tam giác đều thành các khối chóp tam giác, GV có thể lựa chọn phần mềm Geogebra.

Hình chóp cụt được thiết kế bằng phần mềm Geogebra có thể tạo các mặt cắt và chuyển động xoay giúp HS nhận dạng các khối chóp tam giác $C'.ABC$, $C'.A'B'B$ và $C'.A'AB$ (Hình 9).



Hình 9. Phân chia khối chóp cụt tam giác đều bằng Geogebra

Gv sưu tầm video về phân chia - cắt ghép khối chóp cụt tứ giác đều (<https://www.youtube.com/watch?v=EuTgldWqjwE>) để giúp HS có cái nhìn trực quan và tưởng tượng không gian. Từ đó HS từng bước khám phá tri thức toán học.

Trên đây là ba biện pháp được đề xuất trong dạy học Hình học theo lý thuyết RME ở trường THPT. Nhờ tính khái quát và tính khả thi, các biện pháp đề ra có thể áp dụng linh hoạt cho các chủ đề hình học khác nhau ở trường THPT như phương pháp tọa độ trong mặt phẳng, phương

pháp tọa độ trong không gian, quan hệ song song và quan hệ vuông góc trong không gian,... Trong quá trình vận dụng các biện pháp vào thực tiễn dạy học, GV không chỉ thiết kế và lựa chọn các tình huống gắn với bối cảnh sao cho HS thực hiện các nhiệm vụ được giao để hình thành tri thức mà GV còn đóng vai trò là người định hướng, điều phối các hoạt động giải quyết vấn đề, trao đổi và thảo luận, khuyến khích HS khám phá lại kiến thức và hỗ trợ kịp thời để HS có thể từng bước tự xây dựng tri thức toán học phù hợp với sự phát triển nhận thức của cá nhân người học.

3. Kết luận

RME là phương pháp dạy học có nhiều điểm phù hợp tinh thần đổi mới phương pháp dạy học môn Toán cũng như CTGDPT môn Toán năm 2018. Xuất phát từ những nghiên cứu và hiểu biết về lý thuyết RME, CTGDPT môn Toán 2018, ba biện pháp vận dụng lý thuyết RME trong dạy học Hình học ở trường THPT nhằm vận dụng đúng, đảm bảo tinh thần RME trong dạy học môn Toán được đề xuất trong đó hai biện pháp gắn liền với hai nguyên tắc quan trọng của RME (nguyên tắc sử dụng bối cảnh và nguyên tắc sử dụng mô hình), biện pháp thứ 3 chú trọng đến tích hợp CNTT trong dạy học theo RME. Ví dụ minh họa dạy học công thức thể tích của hình chóp cụt đều thuộc Hình học không gian (Toán 11) được trình bày để minh chứng cho tính khả thi của các biện pháp.

* **Lời cảm ơn:** Nghiên cứu này được tài trợ bởi nguồn ngân sách khoa học và công nghệ của Trường Đại học Sư phạm Hà Nội trong đề tài cấp Trường mã số SPHN24-19.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Furinghetti F & Menghini M, (2023). *The Royaumont Seminar as a booster of communication and internationalization in the world of mathematics education*. In “Modern Mathematics: An International Movement?”, p. 55-78, Springer.
- [2] Bjarnadóttir K, (2014). *History of teaching arithmetic*. In “Handbook on the History of Mathematics Education”. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-9155-2_21.
- [3] Treffers A, (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics instruction*. SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology, (9783319059563).
- [4] Smid HJ, (2020). *Dutch Mathematicians and Mathematics Education - A Problematic Relationship*. In “National Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics: Teaching and Learning in the Context of Realistic Mathematics Education”, p. 63-75.
- [5] Van den Heuvel Panhuizen M, (2010). Reform under attack - forty years of working on better mathematics education thrown on the scrapheap? No way! *Annual meeting of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, 33rd, Fremantle, Western Australia, Jul 3-7.
- [6] Treffers A, (1993). Wiskobas and Freudenthal realistic mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 25(1), 89-108.
- [7] Van den Heuvel Panhuizen M & van Zanten MA, (2020). Realistic Mathematics Education: A brief history of a longstanding reform movement. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 17, 65-73.
- [8] Phan TT, Do TT, Trinh TH, Tran T, Duong HT, Trinh TPT, Do BC & Nguyen TT, (2022). A Bibliometric Review on Realistic Mathematics Education in Scopus Database Between 1972-2019. *European Journal of Educational Research*, 11(2), 1133-1149. <https://doi.org/10.12973/eu-jer.11.2.1133>.
- [9] Gravemeijer K, (1994). *Developing realistic mathematics education*. Faculty of Sciences, Freudenthal Institute.
- [10] Nguyen TT, (2005). *Learning to teach realistic mathematics in Vietnam*. Amsterdam: Universiteit van Amsterdam.
- [11] Le TA, (2006). *Applying Realistic Mathematics Education in Vietnam: Teaching middle school geometry*, Univesitat Postdam.
- [12] Nguyen TT, Trinh TPT, Ngo HTV, Hoang NA, Tran T, Pham HH & Bui VN, (2020). Realistic mathematics education in Vietnam: Recent policies and practices. *International Journal of Education and Practice*, 8(1). <https://doi.org/10.18488/journal.61.2020.81.57.71>.

- [13] Nguyen TT & Phan TT, (2020). Realistic Mathematics Education: Theory research and some suggestion for Vietnam mathematics education curriculum development reform. *Journal of Science Educational Science*, 65(4). <https://doi.org/10.18173/2354-1075.2019-0064>.
- [14] LT Anh & T Cường, (2020). Bàn về tiếp cận và một số biện pháp vận dụng lý thuyết RME trong dạy học môn Toán ở Việt Nam. *HNUE Journal of Science*, 65(7), 162-1973.
- [15] Nguyen PL & Ngo TTT, (2020). Approach to realistic mathematics education in teaching mathematics: A case of cosine theorem – Geometry 10. *International Journal of Scientific and Technology Research*, 9(4).
- [16] Duong HT, Nguyen TT, Bui PU, Lu KN, Lam TK & Phan TT, (2022). Realistic Mathematics Education's Effect on Students' Performance and Attitudes: A Case of Ellipse Topics Learning. *European Journal of Educational Research*, 11(1). <https://doi.org/10.12973/eu-jer.11.1.403>.
- [17] Nguyen TD, (2022). Designing a teaching model based on the Realistic Mathematics Education (RME) approach and its application in teaching calculus. *Journal of Mathematics and Science Teacher*, 2(1). <https://doi.org/10.29333/mathsciteacher/11918>.
- [18] Nguyen TD, (2023a). Realistic mathematics education and authentic learning: A combination of teaching mathematics in high schools. *Journal of Mathematics and Science Teacher*, 3(1). <https://doi.org/10.29333/mathsciteacher/13061>.
- [19] Freudenthal H, (1972a). *Mathematics as an Educational Task*. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland. <https://doi.org/10.1007/978-94-010-2903-2>.
- [20] Zulkardi, (2002). *Developing a learning environment on Realistic Mathematics Education for Indonesian student teachers*. Doctoral dissertation, University of Twente, Enschede.
- [21] Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1998). *Realistic Mathematics Education: Work in progress* In “Theory into Practice in Mathematics Education”, Eds (Breiteig T & Brekke G). Kristiansand, Norway: Faculty of Mathematics and Sciences.
- [22] Zolkower B, Bressan AM, Pérez S & Gallego MF, (2020). *From the bottom up-Reinventing realistic mathematics education in Southern Argentina*. In “International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics”, 13, p. 133-166. DOI:10.1007/978-3-030-20223-1_9.
- [23] Freudenthal H, (1972b). Mathematics as an Educational Task. *Mathematics as an Educational Task*. <https://doi.org/10.1007/978-94-010-2903-2>.
- [24] Gravemeijer K, (2002). Emergent modeling as the basis for an instructional sequence on data analysis. *Developing a Statistically Literate Society. Proceedings of the International Conference on Teaching Statistics [CD-ROM]*.
- [25] Gravemeijer K, (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(2), p. 155-177.
- [26] Gravemeijer K, Cobb P, Bowers J & Whitenack J, (2012). *Symbolizing, modeling, and instructional design*. In “Communicating and symbolizing in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design”, Eds (Cobb P, Yackel E & McClain K), Mahwah, NJ: Erlbaum.
- [27] Freudenthal H, (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*, 9. Springer Science & Business Media.
- [28] Freudenthal H, (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*, 1. Springer Science & Business Media.
- [29] Gravemeijer K & Terwel J, (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies*, 32(6), 777-796.
- [30] ĐĐ Thái (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên), (2023). *Toán 11 (Tập 2) bộ sách Cánh Diều*, NXB Đại học Sư phạm.
- [31] TN Dũng (Tổng Chủ biên), TĐ Huyền & NT Anh (Chủ biên), (2023). *Toán 11 (Tập 2) bộ sách Chân trời sáng tạo*, NXB Giáo dục Việt Nam.
- [32] LTH Châu (Tổng chủ biên) & TA Dũng (Chủ biên), (2023). *Toán 11 (Tập 2) bộ sách Cùng khám phá*, NXB Đại học Huế.
- [33] HH Khoái (Tổng chủ biên), CT Anh, TV Tấn & ĐH Thắng (đồng chủ biên), (2023). *Toán 11 (Tập 2) bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống*, NXB Giáo dục Việt Nam.